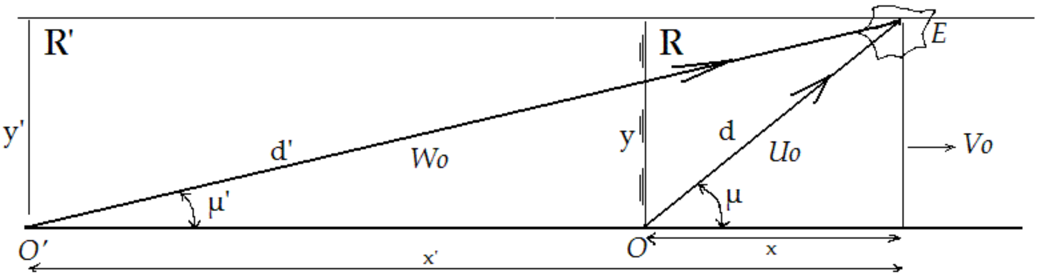
6. Loi d'addition générale des vitesses relativistes

Les transformations de Lorentz obtenues, nous pouvons maintenant établir la formule générale d'addition des vitesses relativistes en procédant comme ceci: un événement E (x,y,z,To) se produit dans un référentiel galiléen R, en un point de l'espace (x,y,z) à l'instant To; dans un autre référentiel galiléen R', où R est animé par rapport à R' d'une vitesse uniforme Vo, le long de l'axe Ox' de R', les coordonnées de cet événement E seront (x',y',z',To'). On admet, par définition, que les montres des origines O dans R, et O' dans R', marquent To = 0 lorsque O et O' se croisent. Il vient que si un mobile quelconque se trouve en O au moment du croisement OO', puis en E au moment précis de l'événement E, ces deux conjonctions successives vont faire que la vitesse du mobile dans R va être égale à Uo=d/To, où d est la distance parcourue pendant la durée To [avec d = sqrt $(x^2+y^2+z^2)$]; alors que, dans R', la vitesse du mobile sera égale à Wo = d'/To', où d' représente la distance O'E, et To' le temps pendant lequel le mobile va aller rejoindre E en partant de O'.

Pour la commodité du calcul qui suit, on admet que le mobile se déplace sur le plan (O, x, y), ce qui a l'avantage de poser directement z = z' = 0 ; mais on pourrait pratiquer de la même façon avec n'importe quel plan choisi, par exemple le plan (O, x, z), ou n'importe quel autre plan qu'on voudra prendre, en pivotant tout autour de l'axe Ox.



On va donc avoir Wo= d'/To' , soit:

$$Wo = \frac{\sqrt{\left[\dfrac{x + Vo.To}{\sqrt{1 - \dfrac{Vo^2}{c^2}}}\right]^2 + \left[y\,\dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{Vo^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{Vo^2}{c^2}}}\right]^2}}{\dfrac{To + \dfrac{x.Vo}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{Vo^2}{c^2}}}}$$

et, en remplaçant x par cosμ Uo.To, et y par sinμ Uo.To, puis en simplifiant par To; puis par $1/\mathrm{sqrt}(1-Vo^2/c^2)$, on obtient:

$$Wo = \frac{\sqrt{(Vo + \cos\mu.Uo)^2 + \left(\sin\mu.Uo\sqrt{1 - \dfrac{Vo^2}{c^2}}\right)^2}}{1 + \dfrac{\cos\mu\, Uo.Vo}{c^2}}$$

Deux cas particuliers:

1) si μ = 0° (le mobile est éjecté dans la direction Ox), on a cosμ = 1 et sinμ = 0 d'où Wo = $(Uo + Vo)/(1 + Vo.Uo/c^2)$
2) si μ =90° (le mobile est éjecté selon la normale dans R) et on a cosμ = 0 et sinμ = 1soit Wo = sqrt$(Vo^2 + Uo^2 - Vo^2Uo^2/c^2)$

Les composantes longitudinale Wo' et normale Wo" de la vitesse Wo peuvent être données par pythagorisme direct, soit:

$$Wo' = \frac{Vo + \cos\mu.Uo}{1 + \dfrac{\cos\mu\, Uo.Vo}{c^2}} \qquad Wo'' = \frac{\sin\mu.Uo\sqrt{1 - \dfrac{Vo^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{\cos\mu\, Uo.Vo}{c^2}}$$

Les composantes longitudinale et transversale d'une résultante de vitesses relativistes étant connues, on peut facilement déterminer la valeur du nouvel angle μ' dans R' à partir de μ dans R, puisqu'on a cosμ' = Wo'/Wo et sinμ' = Wo"/Wo, soit:

$$\cos\mu' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\dfrac{\sin\mu\sqrt{1 - \dfrac{Vo^2}{c^2}}}{\cos\mu + \dfrac{Vo}{Uo}}\right]^2}} \qquad \sin\mu' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\dfrac{\cos\mu + \dfrac{Vo}{Uo}}{\sin\mu\sqrt{1 - \dfrac{Vo^2}{c^2}}}\right]^2}}$$